

### 3. **Attività di pre-analisi: loro importanza ed esempi<sup>1</sup>**

Gianfranco Arrigo

Why does the study of the mathematical analysis cause students a lot of trouble? Why should the concepts of integral, derivative and limit be much harder than those of elementary algebra and geometry? Or, why is the mathematical infinite introduced only in the final year of high school, when it is discussed in abstract and formalized way? This article encourages all teachers to bring up in their classes activities concerning the mathematical infinite, starting already at elementary school or in the first years of secondary school.

#### 1. **L'analisi matematica è difficile?**

È opinione assai diffusa che lo studio dell'analisi matematica crei parecchie difficoltà agli studenti. Si potrebbe pensare che ciò sia dovuto esclusivamente al fatto che concetti come quelli di limite, di derivata e di integrale si rivelano ben più ardui di quelli dell'algebra e della geometria elementari. Essi poggiano infatti su quello di infinità attuale, che comporta ostacoli epistemologici ben conosciuti e che sono stati studiati anche in seno al NRD di Bologna (Arrigo G. - D'Amore B., 1999, 2002)<sup>2</sup>. Ma nelle ricerche citate è subito apparso evidente che l'apprendimento del concetto di infinito è inibito anche dalla presenza di ostacoli didattici. È appunto su questi che voglio porre l'attenzione. Osservo che, ai fini del miglioramento dell'apprendimento, questi ostacoli sono, almeno in parte, rimovibili, a condizione che siano ben conosciuti dall'insegnante e che si riesca a proporre rimedi applicabili in classe. Inoltre faccio notare che, tradizionalmente, le prime immagini mentali di tipo algebrico (per esempio concernenti i numeri e le operazioni) e di tipo geometrico (per esempio relative alle figure geometriche) l'allievo se le può costruire sin dai primi giorni di scuola, mentre le immagini mentali sull'infinito matematico se le può formare solo negli ultimi anni degli studi superiori e, ciò che preoccupa maggiormente, queste immagini devono subito diventare modelli di un certo grado di formalizzazione.

- 
1. Questo articolo è la rielaborazione del testo del seminario per gli insegnanti delle scuole superiori tenuto dall'autore in occasione del Convegno del ventennale svoltosi a Castel San Pietro Terme (Bo) nei giorni 4-6 novembre 2006.
  2. La ricerca ha poi conosciuto una terza fase, condotta da Bruno D'Amore, alla quale hanno partecipato ricercatori del NRD di Bologna, dell'ASP di Locarno (Svizzera) e del MESCUJ di Bogotá (Colombia). Vedere in particolare il rapporto Il «senso dell'infinito», pubblicato sulla rivista *La matematica e la sua didattica*, n. 2, pp. 46-83.

<b>Algebra e Geometria</b>	<b>Analisi</b>
Prime immagini mentali: già alla scuola dell'infanzia.	Alla scuola dell'infanzia: niente.
Alla scuola primaria: primi raffinamenti.	Alla scuola primaria: niente.
Alla scuola media: prime importanti sistemazioni.	Alla scuola media: niente.
Nelle prime classi superiori: altri accomodamenti, generalizzazioni.	Nelle prime classi superiori: niente.
Nelle classi terminali: formalizzazioni.	Nelle classi terminali: tutto.

Tab. 1 Le diverse situazioni di algebra e geometria da una parte e analisi dall'altra, nell'insegnamento tradizionale.

## 2. Il caso singolare del concetto di infinito matematico

A partire dalla seconda metà del XIX secolo, grazie soprattutto ai lavori dei matematici tedeschi (da Cantor a Dedekind), il concetto di infinito è stato rigorosamente sistemato e con esso anche tutta la matematica che ne faceva uso esplicito, denominata poi «analisi matematica». Ai giorni nostri non dovrebbe perciò esistere alcun pregiudizio nei suoi confronti. La realtà, almeno quella scolastica che ci interessa direttamente, pare però essere assai diversa. È difficile trovare un insegnante della scuola primaria che si preoccupi di far compiere ai propri alunni esperienze con l'infinito matematico, ma è pure difficile trovarne uno della scuola media che faccia altrettanto e l'osservazione vale addirittura anche nel caso di insegnanti della scuola superiore, se rapportata ai primi anni di quel ciclo di studi. Insomma, sembrerebbe di trovarsi di fronte a una proibizione non esplicitata, ma seguita da tutti, com'era il caso dell'educazione sessuale fino a qualche decennio fa. Eppure non è difficile constatare come le prime immagini spontanee della quantità infinita si trovino già nella mente dei bimbi di 4-5 anni. Ora, si può ben pensare che fra queste immagini, largamente incomplete, ve ne siano alcune che contengono idee matematicamente errate. Sappiamo benissimo che tali immagini, se lasciate sedimentare per anni, si trasformano in misconcezioni e quindi in solidi modelli parassiti (D'Amore B., 1999). Questo fenomeno, a mio avviso, è il principale responsabile delle difficoltà che gli studenti delle superiori incontrano nello studio dell'analisi. Eppure, mi si dirà, tali difficoltà non sono generali, ma limitate a una minoranza di studenti, perché, se si esaminano i testi degli esami di maturità, si può ben concludere che esigono buone conoscenze di analisi, talvolta anche nozioni di una certa raffinatezza. Qui sta uno dei malintesi più grandi a proposito dell'apprendimento della matematica. Si identifica cioè il «saper fare un esercizio» con la «conoscenza» o peggio ancora con la «competenza» in matematica. Per *conoscenza* intendo la rielaborazione autonoma di contenuti appresi allo scopo di raggiungere un certo obiettivo e il risultato di tale elaborazione; per *competenza* intendo quel concetto complesso e dinamico che comprende la padronanza della conoscenza, l'accettazione dello stimolo a farne uso e il desiderio di accrescere la propria conoscenza, dunque di aumentare la competenza stessa (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003).

Nella ricerca concernente la «robustezza» degli apprendimenti ho potuto indagare proprio su questo punto (Arrigo G., 2004). La ricerca ha coinvolto un gran numero di classi svizzere e italiane, dalla prima primaria al primo anno delle superiori. Le classi hanno svolto un determinato segmento di programma con i loro insegnanti,

secondo le abituali modalità didattiche. Alla fine di questa attività è stato somministrato un test a risposte chiuse. Gli allievi che hanno ottenuto i migliori risultati sono stati in seguito sottoposti a un colloquio con lo scopo di rilevare il «grado di robustezza» degli apprendimenti che nel test avevano mostrato di possedere, secondo la scala seguente:

- *livello di robustezza 1*: l'allievo conferma la risposta data nel test, giustificandola;
- *livello di robustezza 2*: l'allievo rifiuta la controproposta del ricercatore, apparentemente corretta, motivando il suo rifiuto;
- *livello di robustezza 3*: l'allievo rifiuta la controproposta, presentata autoritariamente dal ricercatore con argomentazioni che vanno oltre le conoscenze dell'allievo.

Ebbene, un rapido sguardo ai risultati dei colloqui indica che pochi allievi raggiungono i livelli 2 e 3 di robustezza, ma anche che un certo numero di essi non raggiunge nemmeno il livello 1. È bastato dir loro «*Controlla bene la tua risposta, perché non mi convince: se vuoi cambiare, te lo lascio fare subito e non dirò niente al tuo insegnante...*» per far traballare la certezza di aver dato la risposta corretta, che in realtà lo era. L'insicurezza tradisce un apprendimento superficiale. Può essere attribuito a un contratto didattico troppo fortemente vissuto: «*faccio così perché me lo ha detto l'insegnante e così facendo sono sicuro che andrò incontro alle sue aspettative*». Nel caso di studenti delle superiori, molto spesso, la causa è dovuta a necessità contingenti che spingono lo studente a memorizzare nozioni e procedimenti, rinunciando a capire le ragioni che li determinano: «*per favore, mi dica solo come si fa, il resto non mi interessa*» potrebbe essere la loro richiesta all'insegnante.

Con lo studio dell'analisi matematica avviene la stessa cosa, forse anche in misura maggiore. Riporto, a mo' d'esempio, un episodio vissuto come insegnante liceale. Concerne le serie infinite, in particolare la serie cosiddetta geometrica. Tutti gli allievi imparavano a calcolarne il limite e la cosa era persino divertente. Ci si sbizzarriva a calcolare la lunghezza di spirali, l'area e il volume totale di successioni di figure geometriche iterate e si riusciva a dare persino una spiegazione convincente al famoso paradosso di Achille e della tartaruga, attribuito a Zenone di Elea. Una certa soddisfazione la provavo anch'io, soprattutto perché, di solito, mi si assegnavano le classi più problematiche. Finché un giorno... giunse la clamorosa disillusione. Feci alcuni colloqui clinici ad allievi che nel compito avevano calcolato correttamente il limite della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

che vale 2.

A ciascuno di questi studenti, fra i più brillanti della classe, proposi lo stesso ragionamento:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

*calcoliamo a mente anche solo la somma dei primi tre termini; otteniamo 1,75: un valore già molto vicino a 2. Ora attento: potendo continuare, aggiungeremmo ogni volta un numero positivo, cioè aumenteremmo la somma, e ciò, in teoria, un numero infinito di volte. Ti pare credibile che il risultato sia solo 2?*

Ebbene, solo uno studente su 6 mi ha detto con una certa sicurezza che la somma è 2, aggiungendo che, anche se infiniti, gli addendi diventano sempre più piccoli, fin quasi ad annullarsi. Gli altri si sono dichiarati sicuri del fatto che, continuando ad aggiungere numeri positivi, si sarebbe superato 10, 100, 1000, insomma che la serie sarebbe stata addirittura divergente.

Questo è uno degli episodi che mi hanno fatto capire come sia illusorio accontentarsi della riuscita negli esercizi. Il vero apprendimento, la conoscenza, la competenza sono ben altra cosa ed è verso questi traguardi che occorre dirigersi.

Constatazioni analoghe si possono fare con ogni concetto di analisi. Per esempio il famoso rapporto incrementale, che gli studenti all'esame di maturità normalmente non sbagliano nella forma generale

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ma che poi non sanno applicare correttamente, per esempio nel caso  $f(x)=1/x$ , arrivando a scrivere

$$\frac{\left(\frac{1}{x} + \Delta x\right) - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

«Disattenzione, mancanza di concentrazione,...» sono i commenti che di solito fa l'insegnante. In realtà l'errore tradisce un apprendimento superficiale. Molto probabilmente lo studente non ha mai incontrato, negli anni precedenti allo studio dell'analisi, situazioni in cui il rapporto incrementale sia significativo. Manca cioè un'esperienza euristica su cui appoggiarsi.

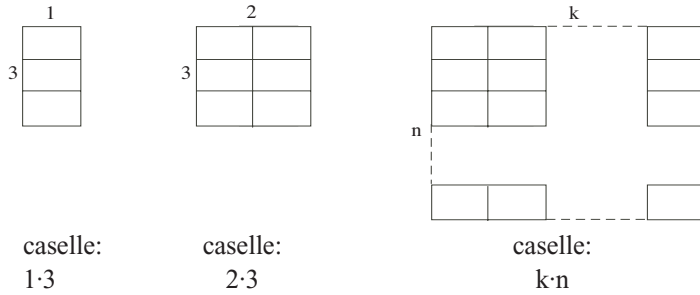
Siamo giunti al punto focale di questo breve intervento, che potrebbe ridursi a un chiaro e caloroso appello a tutti gli insegnanti: curare sin dalla scuola primaria, ma soprattutto nella scuola media e nei primi anni delle superiori, la formazione di immagini mentali corrette sull'infinito (potenziale e attuale), sulla cardinalità degli insiemi infiniti e sulla manipolazione algebrica dell'infinito.

In particolare: si tratta di far prendere coscienza agli allievi, mediante la pratica di opportune situazioni, che con le quantità infinite non valgono molte delle affermazioni che in ambito finito sono corrette e persino ovvie. Ciò significa dare importanza, anche nei documenti programmatici, alle attività di pre-analisi.

### 3. Alcuni esempi di attività di pre-analisi

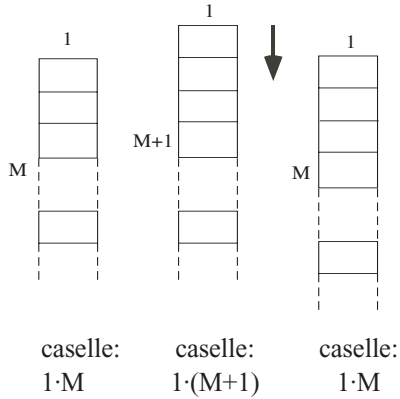
#### 3.1. Tabelle...

##### Caso finito



##### Tabella con infinite righe

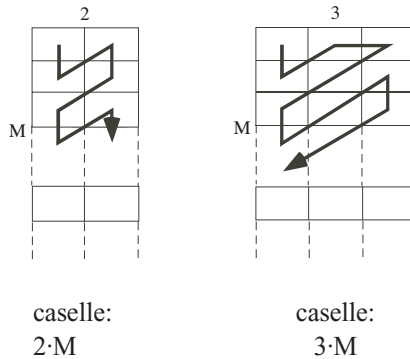
Siano  $M$  il cardinale di un insieme infinito numerabile;  $n, k$  numeri naturali.



Nuovo risultato:

$$\mathbf{M=M+1} \quad \mathbf{M=M+2} \quad \dots \quad \mathbf{M=M+k}$$

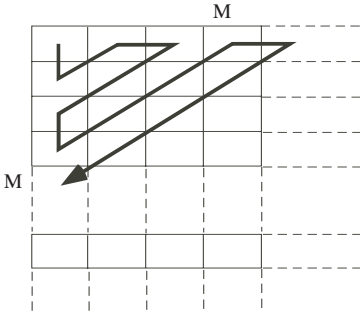
##### Tabella con più colonne infinite



I percorsi indicati passano una e una sola volta da ogni casella, quindi queste tabelle possono essere trasformate in tabelle  $1 \times M$  senza che il numero delle loro caselle cambi. Nuovo risultato:

$$2 \cdot M = M \quad 3 \cdot M = M \quad \dots \quad k \cdot M = M$$

**Tabella con infinite righe e infinite colonne**

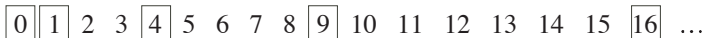


Anche in questo caso esiste almeno un percorso che passa una e una sola volta da ogni casella; quindi anche queste tabelle possono essere trasformate in tabelle  $1 \times M$  senza che il numero delle loro caselle cambi. Nuovo risultato:

$$M \cdot M = M^2 = M \quad M^3 = M \quad \dots \quad M^k = M$$

**Esempio 1: la peculiarità degli insiemi infiniti**

Secondo la definizione di Galileo-Dedekind, un insieme si dice infinito se e solo se si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. In questa definizione c'è la forte presenza di Galileo Galilei, che circa tre secoli prima si era posto il problema se vi siano più numeri naturali di numeri quadrati:



L'intuizione superficiale (a volte detta «buon senso») farebbe dire che vi sono molti più numeri naturali che numeri quadrati, ma d'altra parte Galileo si rende conto che si può stabilire un'applicazione biunivoca tra l'insieme  $\mathbf{N}$  dei numeri naturali e  $\mathbf{U}$  dei numeri quadrati:

$$\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{U}$$

$$n \leftrightarrow n^2$$

ma ciò conduce a concludere che vi sono tanti numeri quadrati quanti numeri naturali.

Nuovo risultato:

Se  $I$  è un insieme infinito, possiede almeno una parte propria con la sua stessa cardinalità.

Questo risultato contrasta con l'ottava nozione comune di Euclide: «il tutto è maggiore della parte».

**Esempio 2: somma di infiniti addendi**

La seguente somma algebrica di infiniti addendi è la cosiddetta serie di Grandi<sup>3</sup> e porta la data del 1703:

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Vi sono almeno tre modi diversi per calcolarla.

Primo modo:

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

Secondo modo:

$$s = 1 - [(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots] = 1 - [0 + 0 + 0 + \dots] = 1 + 0 = 1$$

Terzo modo:

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s \Rightarrow 2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

Tre modi diversi, tre risultati diversi: dove ha origine la contraddizione? Sicuramente nell'uso disinvolto (scorretto) della proprietà associativa, come ebbe a osservare già Jacopo Riccati<sup>4</sup>. Nuovo risultato:

**In una somma infinita non si può sempre applicare la proprietà associativa.**

**Esempio 3: manipolazione algebrica di quantità infinite**

Consideriamo la seguente funzione razionale:

$$x \xrightarrow{g} g(x) = \frac{3x + 11}{4x + 13}$$

Come si comportano i valori  $g(x)$  a mano a mano che  $x$  diventa sempre più grande?

Proviamo a calcolare un po' di valori con l'aiuto di un computer. Per far crescere più in fretta le ascisse, sostituiamo  $x$  con  $3^x$  e poi con  $10^x$ :

- 
3. Luigi Guido Grandi (1671-1742), gesuita, si è occupato dello studio di curve anche non piane. Nel trattato «La versiera di Agnesi» del 1703 (Gaetana Agnesi, una delle poche matematiche italiane dell'epoca), Grandi diffonde in Italia il Calcolo di Leibniz. È in questa occasione che presenta la somma infinita, dando come unica soluzione  $s=1/2$ .
  4. Jacopo Riccati (1676-1754), matematico veneto, è ricordato soprattutto per l'equazione differenziale che ha preso il suo nome, nella risoluzione della quale presenta un metodo innovativo che permette, mediante un cambiamento di variabile, di ridurre l'equazione dal secondo ordine al primo.

x	3 <sup>x</sup>	g(3 <sup>x</sup> )	10 <sup>x</sup>	g(10 <sup>x</sup> )
1	3	0.8	10	0.773584906
2	9	0.775510204	100	0.753026634
3	27	0.760330579	1000	0.750311488
4	81	0.753709199	10000	0.75003124
5	243	0.751269036	100000	0.750003125
6	729	0.750426767	1000000	0.750000312
7	2187	0.750142678	10000000	0.750000031
8	6561	0.750047606	100000000	0.750000003
9	19683	0.750015874	1000000000	0.75
10	59049	0.750005292	10000000000	0.75
11	177147	0.750001764	1E+11	0.75
12	531441	0.750000588	1E+12	0.75
13	1594323	0.750000196	1E+13	0.75
14	4782969	0.750000065	1E+14	0.75
15	14348907	0.750000022	1E+15	0.75
16	43046721	0.750000007	1E+16	0.75
17	129140163	0.750000002	1E+17	0.75
18	387420489	0.750000001	1E+18	0.75
19	1162261467	0.75	1E+19	0.75

La tabella ci mostra come, al crescere delle ascisse, i valori  $g(x)$  tendono ad avvicinarsi sempre di più a 0,75. L'avvicinamento è tale che la differenza tra questo valore limite e  $g(x)$  si fa più piccola di quanto il computer riesca a percepire. Con le potenze di 3 a esponente naturale, il computer «si arrende» a partire dall'esponente 19, con quelle di 10 già da 9.

Dai calcoli eseguiti a macchina possiamo formulare la congettura che, a mano a mano che  $x$  diventa sempre più grande, i corrispondenti valori di  $g(x)$  si avvicinano indefinitamente a 0,75.

Questo risultato può essere controllato anche teoricamente con un ragionamento che è alla portata anche di allievi di quarta media.

Sia  $M$  il cardinale di un insieme infinito.

Operiamo dapprima una semplice trasformazione algebrica:

$$\frac{3x+11}{4x+13} = \frac{3 + \frac{11}{x}}{4 + \frac{13}{x}}$$

Per  $x$  molto grande ( $x \rightarrow M$ ), le frazioni  $\frac{11}{x}$  e  $\frac{13}{x}$  si avvicinano indefinitamente a zero, perciò possiamo scrivere:

$$\frac{3M+11}{4M+13} = \frac{3 + \frac{11}{M}}{4 + \frac{13}{M}} = \frac{3+0}{4+0} = 0,75$$

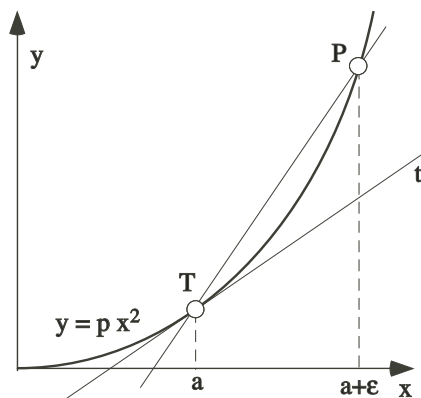
Nuovo risultato:

**Se  $M$  è il cardinale di un insieme infinito e  $k$  un numero finito, allora**

$$\frac{k}{M} = 0$$



**Esempio 4: retta tangente a una parabola  $y=px^2$  ( $p>0$ )  
in un suo punto T di ascissa a**



Con riferimento alla figura, consideriamo un secondo punto della parabola di ascissa  $a+\epsilon$ .

Calcoliamo la pendenza  $m_{PT}$  della secante PT:

$$m_{PT} = \frac{p(a+\epsilon)^2 - pa^2}{\epsilon} = 2pa + \epsilon$$

Sia  $M$  il cardinale di un insieme infinito:

se,  $T \rightarrow P$ , la secante tende a diventare tangente.

Poniamo  $\epsilon = \frac{1}{M} = 0$ , perciò la pendenza della tangente è:

$$m_t = 2pa + 0 = 2pa$$

Infine l'equazione della retta tangente è:

$$y = 2pax - pa^2$$

Nuovo risultato:

**la tangente a una curva come posizione limite di una secante si traduce algebricamente sostituendo l'ascissa  $a+\epsilon$  con**

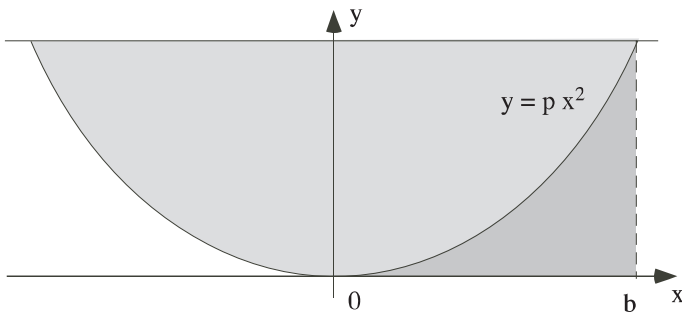
$$a + \frac{1}{M}$$

Commento:

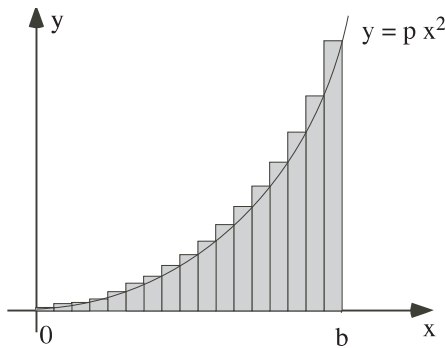
tutto ciò senza alcuna teoria dei limiti, ma lavorando unicamente sull'intuizione. Con ciò non si vuole ottenere alcun rigore matematico (quello giungerà più tardi), ma preparare il terreno che permetterà una fondazione teorica più robusta.

**Esempio 5: area del settore parabolico**

Consideriamo ancora la parabola  $y=px^2$  ( $p>0$ ) e il settore staccato da una retta parallela all'asse  $x$ , come mostra la figura seguente.



Per evidenti ragioni di simmetria, basta trovare l'area della parte (metà esatta) che si trova nel primo quadrante. Essa è la differenza tra quella di un rettangolo e quella del triangolo curvilineo che nella figura appare di un grigio più scuro rispetto a quello del settore parabolico.



La approssimiamo con  $n$  rettangoli circoscritti di base  $b/n$ . L'altezza di questi rettangoli coincide con il valore massimo di  $y$  quando l'ascissa percorre l'intervallo della base; essendo la funzione monotona crescente, questo valore coincide sempre con quello relativo all'estremo destro di ogni intervallo di ampiezza  $b/n$ . Possiamo quindi esprimere l'area totale del poligono rettangolo unione di tutti i rettangolini:

$$\begin{aligned} \frac{b}{n} \left( p \frac{b^2}{n^2} + p \frac{4 b^2}{n^2} + p \frac{9 b^2}{n^2} + \dots + p \frac{(n-1)^2 b^2}{n^2} \right) &= \frac{p b^3}{n^3} \left[ 1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2 \right] = \\ &= \frac{p b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{p b^3}{6} \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3} = \frac{p b^3}{6} \left( 2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ora, si intuisce che rimpicciolendo sempre di più le basi dei rettangolini – il che significa aumentare sempre di più il numero  $n$  –, questo valore si avvicina indefinitamente all'area del triangolo curvilineo. Questo procedimento fu già applicato da Archimede nel terzo secolo a.C., metodo chiamato «di esaustione»<sup>5</sup>, e reinventa-

5. Il nome deriva dal fatto che, quando  $n$  assume valori più grandi di qualsiasi numero immaginabile, l'area del poligono rettangolo al di fuori del triangolo curvilineo – quindi l'errore, la differenza fra queste due aree – «si brucia», cioè scompare.

to<sup>6</sup> da Evangelista Torricelli e Bonaventura Cavalieri nella prima metà del XVII secolo e da loro battezzato come «metodo degli indivisibili».

Se, nell'espressione finale dell'area del poligono rettangolo, sostituiamo al numero  $n$  il cardinale di un insieme infinito  $M$ , otteniamo:

$$\frac{p b^3}{6} \left( 2 - \frac{3}{M} + \frac{1}{M^2} \right) = \frac{p b^3}{6} (2 - 0 + 0) = \frac{p b^3}{3}$$

Nuovo risultato:

**la somma delle aree di infiniti rettangolini ridotti a un segmento dà un valore maggiore di zero.**

Finalmente, l'area di metà del settore di parabola è:

$$p b^3 - \frac{p b^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot p b^3$$

Osserviamo che è i due terzi dell'area del rettangolo circoscritto. Questo rapporto si mantiene ovviamente anche se estendiamo il risultato all'intero settore parabolico: riotteniamo così un risultato già raggiunto da Archimede.

Ma c'è di più: nel passaggio da  $n$  a  $M$  si riconosce l'importante salto dall'infinità potenziale ( $n$  supera qualsiasi numero che riusciamo a immaginare...) all'infinità attuale ( $n=M$ ). Questo passaggio fu chiarito solo a partire dalla seconda metà del secolo XIX, grazie alla sistemazione teorica dell'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali e in particolare al postulato della continuità che porta il nome del matematico tedesco Dedekind, pubblicato per la prima volta nel famoso scritto del 1872, *Continuità e numeri irrazionali*, ma abbozzato già nell'autunno del 1858, quando Richard Dedekind iniziava il suo periodo d'insegnamento al Politecnico di Zurigo.

Archimede, da buon «ingegnere-scienziato», vedeva la superficie da calcolare come una sottile lamina di materia e quando immaginava di far crescere il più possibile  $n$ , vedeva i rettangolini (striscioline di materia) che tendevano a «segmenti pesanti» come lui li chiamava. Pur restringendosi a segmenti, non dovevano perdere la qualità di massa, perché, sommati, dovevano pur dare un risultato maggiore di zero!

Questa difficoltà è la stessa che incontrano oggi gli studenti che per la prima volta si avvicinano al concetto di limite. Essi vedono che quando  $n$  diventa uguale a  $M$ , i rettangolini si riducono a un segmento e sanno che l'area di un segmento è nulla; tuttavia sono di fronte al fatto che la somma degli infiniti zeri dà un risultato maggiore di zero. Se si prova ad applicare questo procedimento anche a casi nei quali il risultato è conosciuto, si hanno conferme che la cosa funziona.

In questo senso andrebbe preparato il terreno sul quale più tardi fondare, non solo il concetto di limite, ma anche quelli di derivata e di integrale.

---

6. Si è trattato veramente di una reinvenzione perché in quel tempo i documenti di Archimede non si conoscevano. Una copia del *Metodo* di Archimede fu trovata solo nel 1909 fra i manoscritti di un monastero di Costantinopoli. Di lui si conoscevano solo traduzioni in latino di alcune opere, diffuse nella seconda metà del XV secolo.

## Bibliografia

---

Arrigo G. - D'Amore B.

*«Lo vedo, ma non ci credo...» Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale.* Lavoro presentato e accolto al CERME 1 (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education), Osnabruck (D), 1999.

Arrigo G. - D'Amore B.

*«Lo vedo, ma non ci credo...»*, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1. 4-57, 2002.

Arrigo G.

*Rapporto di ricerca: Robustezza degli apprendimenti.* Locarno: ASP, 2004.

D'Amore B.

*Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora. 123-140, 1999.

D'Amore B., Godino J.D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.

Competenze in matematica. Bologna: Pitagora. 19-23, 2003.